MAT468 FONKSİYONEL ANALİZ
2. QUİZ SORULARI

1) X normlu bir uzay ve $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ bu uzayda denk iki norm ise bunlardan birine göre yakınsak olan dizinin diğerine göre de yakınsak olduğunu gösteriniz.

2) $C[1,e]$ vektör uzayında tanımlı $\|f\| = \int_1^e |f(x)|\,dx$ fonksiyonunun bir norm olduğunu gösteriniz.
$f(x) = \ln x$ için bu normu hesaplayınız.

3) $\ell_p = \left\{ x = (x_k) \subset F : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$,
$x = (x_k) \subset \ell_p$, $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$ veriliyor.

$(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ nin Banach uzayı olduğunu gösteriniz.

Not;
Süre : 15:00 – 18:00

13.05.2020

B. SAĞIRDUVAR

Başarılar...

MAT 468 FONKSİYONEL ANALİZ
2. QUIZ ÇÖZÜMLERİ

① $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ olduğundan $\|x\|_2 \leq b.\|x\|_1$ olacak şekilde $b>0$ sayısı vardır.
(x_n), $\|\cdot\|_1$ normuna göre yakınsak olduğundan, $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n>n_0$ için

$$\|x_n - x\|_1 < \frac{\varepsilon}{b}$$

dır. $\forall n>n_0$ için $\|x_n - x\|_2 \leq b.\|x_n - x\|_1 < b.\frac{\varepsilon}{b} = \varepsilon$

$\Rightarrow \|x_n - x\|_2 \to 0$ olur.

Aynı şekilde diğer durum gösterilir.

② $\|f\| = \int_1^e |f(x)|\,dx$

N1. $f=0 \Rightarrow \int_1^e |f(x)|\,dx = 0 \Rightarrow \|f\|=0$ dır. Tersine, $\|f\|=0$ ise $f=0$ dır, gösterelim. $(p \Rightarrow q \Leftrightarrow q' \Rightarrow p')$
$\exists x_0 \in [1,e]$ için $|f(x_0)| \neq 0$ olsaydı f sürekli olduğundan $\exists \delta>0$: $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ için $|f(x_0)| \neq 0 \Rightarrow \int_1^e |f(x)|\,dx \neq 0$ olurdu. $\Rightarrow \|f\|=0$ ile çelişir. O halde $\|f\|=0 \Rightarrow f=0$ dır.

N2. $\|\alpha f\| = \int_1^e |\alpha . f(x)|\,dx = \int_1^e |\alpha| . |f(x)|\,dx =$

$$= |\alpha| . \int_1^e |f(x)|\,dx = |\alpha| . \|f\|$$

N3. $\int_1^e |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_1^e |f(x)|\,dx + \int_1^e |g(x)|\,dx \Rightarrow$

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

$f(x) = \ln x \Rightarrow \|f\|$ normunu bulalım:

$$\|f\| = \int_1^e |\ln x|\,dx = x.\ln x - \int_1^e x . \frac{dx}{x} = x\ln x - x \Big|_1^e = 1$$

$\left(\begin{array}{ll} u = \ln x & \text{kısmi int.} \\ dv = dx & \text{uygulandı} \end{array} \right)$

③ $\ell_p = \{ x = (x_k) \subset F : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \}$, $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$

ℓ_p nin vektör uzayı olması için toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı olması gerekir.

$x, y \in \ell_p \Rightarrow x+y \in \ell_p$ dir:

$0 \le t$ için t^p artan bir fonksiyon olduğundan

$$|x_k + y_k|^p \le (2 \cdot \max(|x_k|, |y_k|))^p = 2^p \cdot \max(|x_k|^p, |y_k|^p)$$
$$\le 2^p \cdot (|x_k|^p + |y_k|^p)$$

$$\Rightarrow \sum |x_k + y_k|^p \le 2^p \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right) < \infty$$

$\Rightarrow x+y \in \ell_p$. $\quad \alpha x \in \ell_p$ açık.

N_1. $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} = 0 \Leftrightarrow \forall k$ için $x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N_2. $\|\alpha \cdot x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha \cdot x_k|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^p \cdot |x_k|^p \right)^{1/p}$

$$= |\alpha| \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \cdot \|x\|_p .$$

N_3. $\|x+y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \overset{\text{Minkowski}}{\le} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{1/p}$

$\Rightarrow \|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$.

-o-

$(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ tam uzay olduğunu gösterelim:

ℓ_p uzayında $x^{(n)}$ Cauchy dizisini alalım. $x^{(n)} = \{ x_k^{(n)} \}$,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall m, n > n_0$ için

$$\| x^{(n)} - x^{(m)} \|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} | x_k^{(n)} - x_k^{(m)} |^p \right)^{1/p} < \varepsilon \qquad (1)$$

$\Rightarrow \forall k$ ve $\forall m, n > n_0$ için $| x_k^{(n)} - x_k^{(m)} | \le \| x^{(n)} - x^{(m)} \|_p < \varepsilon$

olduğundan $(x_k^{(n)})$, F de bir Cauchy dizisidir. $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

tam olduğundan her $k = 1, 2, \ldots$ için

$$\lim_k x_k^{(n)} = x_k$$

yazılır. Verilen dizinin limiti için aday $x = (x_k)$ dizisidir.

$\lceil$ $(x_k^{(n)})$ $\mathbb{R}$ de (veya $\mathbb{C}$ de) Cauchy dizisi,
$\|\cdot\|$ norm fonksiyonu sürekli olduğundan
$(\|x^{(n)}\|_p)$ dizisi $\mathbb{R}$ de Cauchy dizisidir.
~~$\mathbb{R}$ tam~~ dolayısıyla sınırlıdır. Yani
$\|x^{(n)}\|_p \leq A$ olacak şekilde $A>0$ sayısı vardır.
$\Rightarrow \|x\|_p \leq A \Rightarrow x \in \ell_p$. $\rfloor$

(1) de $m \to \infty$ için limit alınırsa $n > n_0$ için
$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^p \right)^{1/p} < \varepsilon$ bulunur. $\Rightarrow$
$\forall n > n_0$, $\|x_k^{(n)} - x\|_p < \varepsilon$, ol. $\Rightarrow \|x^{(n)} - x\|_p \to 0$,
$x = \underbrace{x - x^{(n)}}_{\in \ell_p} + \underbrace{x^{(n)}}_{\in \ell_p}$ ~~pat..~~ $\Rightarrow x \in \ell_p$.